Transformarea z

Raspunsul unui sistem discret liniar si invariant in timp la exponentiala complexa discreta de modul neunitar

$z = x + jy = re^{j\Omega}$; $x, y \in R$; $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $\Omega = arg\{z\}$

$z_0^n = r_0^n \cdot e^{j\Omega_0 n}$; $y[n] = h[n] * z_0^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_0^{n-k} = z_0^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_0^{-k}$

$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}$; $y[n] = z_0^n \cdot H(z_0)$

$x[n] = \sum_k c_k z_k^n \Rightarrow y[n] = \sum_k c_k H(z_k) z_k^n.$

Transformarea z bilaterala

$$\mathcal{Z}\{x[n]\}(z) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \; ; z = r \cdot e^{j\Omega} \; , r \geq 0.$$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n] \cdot r^{-n}\right) \cdot e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\left\{r^{-n} \cdot x[n]\right\}(\Omega) \; ; r \geq 0.$$

$$|z| = r = 1, \; \mathcal{Z}\{x[n]\}\left(e^{j\Omega}\right) = \mathcal{F}\{x[n]\}(\Omega).$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|r^{-n} x[n]\right| \cdot \left|e^{-j\Omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|r^{-n} x[n]\right| < \infty$$

$$r^{-n} x[n] \in l^1.$$

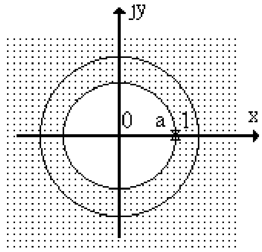
Exemple

1. $x[n]=a^n\sigma[n]\ ,\ |a|<1.$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n$$

$$\mathcal{D}aca\ \left|az^{-1}\right|<1\ \Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\ ,\ |z|>|a|.$$

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}.$$



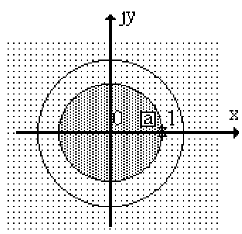
2. $x[n]=-a^n\sigma[-n-1]$

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^n z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(az^{-1}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{az^{-1}}\right)^n=$$

$$=-\frac{1}{az^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a\cdot z^{-1}}\right)^n$$

$$\mathcal{D}aca\ \frac{1}{|a|\left|z^{-1}\right|}<1\ atunci\,X(z)=-\frac{1}{az^{-1}\left(1-\frac{1}{az^{-1}}\right)}=$$

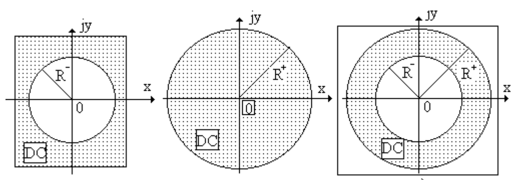
$$=\frac{1}{1-az^{-1}};\ |z|<|a|.$$



Proprietatile domeniului de convergenta al transformarii z bilaterale

1. Domeniul de convergenta al transformatei z bilaterale nu poate contine nici un pol al acesteia.
2. Daca $x[n]$ este un semnal cu suportul de durata finita, $X(z)$, transformata sa bilaterala exista in tot planul, cu exceptia evenual a punctelor $z = 0$ si/sau $z = \infty$.
3. Daca $x[n]$ este un semnal cu intindere infinita spre dreapta si daca cercul $|z| = r_0$ este din domeniul de convergenta al transformatei z bilaterale, atunci toate punctele din plan $|z| > r_0$, cu exceptia eventual a punctului de la infinit, sunt din domeniul de convergenta.

4. Daca $x[n]$ este un semnal cu intindere infinita spre stanga si daca cercul $|z| = r_0$, este inclus in domeniul de convergenta al transformatei z bilaterale atunci toate punctele din plan $|z| \leq r_0$, cu exceptia eventual a punctului din origine sunt din domeniul de convergenta.
5. Daca $x[n]$ este un semnal cu intindere infinita atat la stanga cat si la dreapta si daca cercul $|z| = r_0$ este inclus in domeniul de convergenta al transformatei z bilaterale, atunci acesta este o coroana circulara ce include cercul $|z| = r_0$.



a) b) c)

Exemplu

3. $x[n]=a^{|n|}$, $0<a<1$, $x_1[n]=a^n\sigma[n]$,

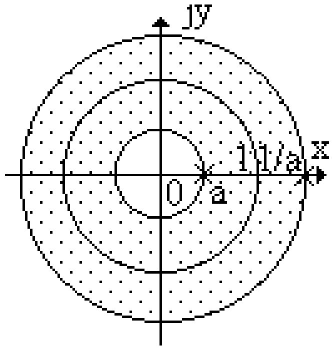
$x_2[n]=a^{-n}\sigma[-n-1]$, $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$.

$$a^n\sigma[n]\rightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}\,;|z|>a.$$

$$a^{-n}\sigma[-n-1]=\left(\frac{1}{a}\right)^n\sigma[-n-1]\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{-1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}},|z|<\frac{1}{a}.$$

$$a^{|n|}\rightarrow\frac{a^2-1}{a}\frac{z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}\,;a<|z|<\frac{1}{a}.$$



Trasformarea z inversa

Fie Γ un contur inchis inclus in domeniul de convergenta al transformatei z bilaterale $X(z): X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot z^{-k}$ se inmulteste cu z^{n-1} si se integreaza pe cercul Γ:

$\oint_\Gamma X(z)z^{n-1}dz=\oint_\Gamma\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{n-k-1}dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\oint_\Gamma\frac{dz}{z^{k-n+1}}$. Pentru orice functie olomorfa in DC, $f(z)$ si orice curba inchisa Γ din DC avem: $\oint_\Gamma\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{2\pi j}{n!}\frac{d^n}{dz^n}f(z)$, a un punct interior curbei. Functia $f(z)=1$ este olomorfa in intreg planul complex, deci si in DC. Punctul $a=0$, este interior cercului Γ considerat.

$$\oint_\Gamma\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\begin{cases}\frac{2\pi j}{0!}\cdot 1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}\Rightarrow x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(z)z^{n-1}dz\,;\Gamma\in \text{DC}$$

$$Z^{-1}\{X(z)\}[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz=x[n]\ ;\ x[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}X(z).$$

Definirea transformatei z bilaterale prin constelatia de poli si zerouri

Daca $X(z)$ este o fractie rationala :

$$X(z)=k\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_{0k})}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_{pk})};\, z\in DC.$$

Este suficienta cunoasterea polilor z_{pk} si a zerourilor z_{0k} pentru a cunoaste $X(z)$ cu exceptia constantei k. Daca se cunoaste in plus si valoarea $X(z_0)$ intr - un anumit punct z_0 din DC, se poate determina si constanta k.

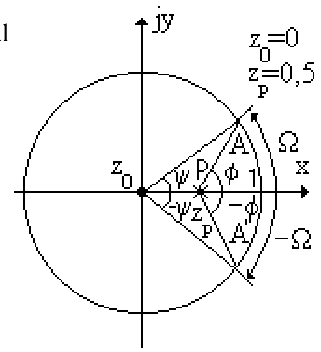
Exemplu

Fie constelatia de poli si zerouri din figura cu $z_0=0$ si $z_p=0{,}5$.

Pentru $k=1$: $X(z)=\frac{z}{z-0{,}5}=\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}$. Daca semnalul $x[n]$ este cauzal atunci DC este definit de $|z|>|z_p|=0{,}5$. Deoarece cercul unitar este in interiorul DC semnalul $x[n]$ are si transformata Fourier in timp discret : $X(\Omega)=\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0{,}5}=\frac{1}{1-0{,}5e^{-j\Omega}}$

Fie punctul A de pe cercul unitar, plasat la unghiul Ω (lungimea arcului de cerc in radiani).

$$|X(\Omega)|=\frac{\left|\overline{OA}\right|}{\left|\overline{AP}\right|};\, \Phi(\Omega)=arg\, X(\Omega)=\psi-\varphi.$$



In cazul general, notand cu z_{pk} si cu z_{0k} polii si zerourile si cu ψ_k si φ_k unghiurile pe care le formeaza vectorii Az_{pk} si Az_{0k} cu axa orizontala, atunci :

$$|X(z)| = |k| \frac{\prod_{k=1}^{M} \left|\overline{Az_{0k}}\right|}{\prod_{k=1}^{N} \left|\overline{Az_{pk}}\right|}; \Phi(\Omega) = arg\, k + \sum_{k=1}^{M} \psi_k - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k .$$

Frecventa Ω reprezinta lungimea arcului de cerc masurat in radiani, pe cercul unitar, de la intersectia acestuia cu semiaxa x > 0 si pana in punctul A, sensul fiind cel trigonometric.

Transformata z unilaterala

$$Z_u\{x[n]\}(z) = X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

Transformata z unilaterala poate fi privita ca si transformata z bilaterala a unui semnal cauzal. De aceea domeniul de convergenta al transformatei unilaterale este fie tot planul fie exteriorul unui disc cu centrul in origine. Transformata z unilaterala este indicata pentru studiul sistemelor cauzale caracterizate de ecuatii cu diferente finite liniare si cu coeficienti constanti care nu au conditii initiale nule.

Proprietatile transformarii z

Notatii:

$x[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}X(z),\, z\in DC_x\,;\, x[n]\overset{Z_u}{\leftrightarrow}X_u(z)\quad y[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}Y(z),\, z\in DC_y\,;\, y[n]\overset{Z_u}{\leftrightarrow}Y_u(z).$

1. Liniaritate

$ax[n]+by[n]\leftrightarrow aX(z)+bY(z);\, z\in DC_x\bigcap DC_y$, cel putin

$ax[n]+by[n]\leftrightarrow aX_u(z)+bY_u(z)$

2. Translatia in timp

$x[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}X(z),\, z\in DC.$

D: $Z\{x[n-n_0]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-n_0]z^{-n}\overset{n-n_0=m}{=}\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^{-(m+n_0)}=z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m}$

Daca $n_0>0$, z = 0 se elimina din DC iar daca $n_0<0$, $z=\infty$ se elimina din DC.

In cazul transformarii unilaterale, pentru $n_0>0$:

$Z_u\{x[n-n_0]\}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n-n_0]z^{-n}\overset{n-n_0=m}{=}\sum_{m=-n_0}^{\infty}x[m]z^{-m}z^{-n_0}=z^{-n_0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}x[m]z^{-m}+\sum_{m=-n_0}^{-1}x[m]z^{-m}\right),$

$x[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}\left(X_u(z)-\sum_{n=-n_0}^{-1}x[n]z^{-n}\right)$

3. Modularea in timp

$e^{j\Omega_0 n}x[n]\leftrightarrow X\left(e^{-j\Omega_0}z\right),\, z\in DC.$

D. $Z\left\{e^{j\Omega_0 n}x[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\Omega_0 n}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left(e^{-j\Omega_0}z\right)^{-n},\, e^{j\Omega_0 n}x[n]\leftrightarrow X_u\left(e^{-j\Omega_0}z\right).$

Mai general:

$z_0^n x[n]\leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)\qquad \frac{z}{z_0}\in \mathrm{DC};\quad z_0^n x[n]\leftrightarrow X_u\left(\frac{z}{z_0}\right).$

4. Reflectarea semnalului

$x[-n]\leftrightarrow X\left(z^{-1}\right),\, \frac{1}{z}\in DC.$

D. $Z\{x[-n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]z^{-n}\overset{m=-n}{=}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\left(\frac{1}{z}\right)^{-m}=X\left(\frac{1}{z}\right).$

5. Diferentierea in domeniul n

$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow\left(1-z^{-1}\right)X(z);\, z\in DC;$

$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow\left(1-z^{-1}\right)X_u(z)-x[-1].$

6. Insumarea in domeniul n

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{X(z)}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}X(z);\ z\in \mathrm{DC}\bigcap \mathrm{DC}^*;\ \mathrm{DC}^* = \{z \| z| > 1\}.$$

D. Fie $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{m} x[k] \Rightarrow x[n] = y[n] - y[n-1] \leftrightarrow X(z) = (1-z^{-1})Y(z);$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z).$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{X_u(z) + \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]}{1-z^{-1}};\ |z| > 1.$$

D. $x[n] = y[n] - y[n-1] \leftrightarrow X_u(z) = (1-z^{-1})Y(z) - y[-1],\ y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k].$

7. Diferentierea in domeniul z

$$nx[n] \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz};\ z\in \mathrm{DC}.$$

$$nx[n] \leftrightarrow -z\frac{dX_u(z)}{dz}.$$

8. $x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*),\ z\in \mathrm{DC}.$

$x^*[n] \leftrightarrow X_u^*(z^*).$

D. $Z\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z^*)^{-n}\right)^* = X^*(z^*);$

9. Teorema convolutiei in domeniul timp

$x[n], y[n] \in C.$

$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(z)Y(z)\ \ z\in \mathrm{DC}_x \bigcap \mathrm{DC}_y$ cel putin.

$x[n] * y[n] \leftrightarrow X_u(z)Y_u(z).$

D. $Z\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] * y[n]) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] z^{-k} z^{-(n-k)} =$

$$\overset{n-k=m}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m] z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = Y(z)X(z).$$

10. Teorema produsului semnalelor in domeniul timp

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(u) Y\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u},\ \Gamma\in \mathrm{DC}.$$

$\mathrm{DC}_x = \{z | R_x^- < |z| < R_x^+\};\ \mathrm{DC}_y = \{z | R_y^- < |z| < R_y^+\} \Rightarrow R_x^- < |u| < R_x^+$ si $R_y^- < \frac{|z|}{|u|} < R_y^+.$

Prin inmultire $\Rightarrow R_x^- \cdot R_y^- < |z| < R_x^+ \cdot R_y^+ \Leftrightarrow \mathrm{DC} = \{z | R_x^- \cdot R_y^- < |z| < R_x^+ \cdot R_y^+\}.$

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X_u(u) Y_u\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u},\ \Gamma\in \mathrm{DC}.$$

D. $Z\{x[n]y[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)u^{n-1}du\right)y[n]z^{-n}=$

$=\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\left(\frac{z}{u}\right)^{-n}\right]\frac{du}{u}=\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)Y\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u}.$

Particularizari.

$x[n]\in l^2.\ y[n]=x^*[n]\Rightarrow |x[n]|^2\leftrightarrow\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)X^*\left(\frac{z^*}{u^*}\right)\frac{du}{u}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2z^{-n}=\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)X^*\left(\frac{z^*}{u^*}\right)\frac{du}{u}.$

Daca $u=e^{j\Omega}\Rightarrow u^*=e^{-j\Omega}$ si $du=je^{j\Omega}d\Omega$ si

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\Omega}\right)X^*\left(e^{j\Omega}\right)j\frac{e^{j\Omega}d\Omega}{e^{j\Omega}}=$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\Omega)|^2d\Omega$

11. Teorema valorii initiale aunui semnal discret cauzal

$x[0]=\lim_{|z|\to\infty}X_u(z)=\lim_{|z|\to\infty}X(z).$

D. $X(z)=X_u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]+\frac{1}{z}x[1]+\ldots$

Trecand la limita se obtine relatia din enunt.

12. Teorema valorii finale a unui semnal discret cauzal

$x[\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)X_u(z)=\lim_{z\to1}(z-1)X(z).$

D. $\sum_{n=0}^{\infty}(x[n+1]-x[n])z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n+1]z^{-n}-X_u(z)\overset{n+1=m}{=}\sum_{m=1}^{\infty}x[m]z^{-(m-1)}-X_u(z)=$

$=z\left(\sum_{m=0}^{\infty}x[m]z^{-m}-x[0]\right)-X_u(z)=(z-1)X_u(z)-zx[0].$

Trecand la limita pentru $z\to1$ se obtine :

$\lim_{z\to1}\sum_{n=0}^{\infty}(x[n+1]-x[n])z^{-n}=\lim_{z\to1}(z-1)X_u(z)-x[0],$

sau : $x[\infty]-x[0]=\lim_{z\to1}(z-1)X_u(z)-x[0]\Leftrightarrow x[\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)X_u(z).$

Relatia dintre transformata z si transformata Laplace

$x_a(t) \leftrightarrow X_a(s)$ *Prin esantionare se obtine* $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)\delta(t - nT_e) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\hat{x}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)\mathcal{L}\{\delta(t - nT_e)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)e^{-snT_e}.$

$x_a(nT_e) = x_d[n] \Rightarrow Z\{x_d[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)z^{-n}$

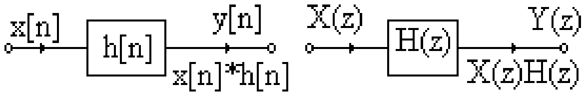
$\mathcal{L}\{x_a(t)\delta_{T_e}(t)\}\Big|_{e^{sT_e}=z} = Z\{x_d[n]\}.$

$\mathcal{L}_u\{x_a(t)\delta_{T_e}(t)\}\Big|_{e^{sT_e}=z} = Z_u\{x_d[n]\}.$

Studiul sistemelor discrete liniare si invariante in timp prin intermediul transformarii z

Forma simpla a teoremei convolutiei semnalelor discrete face din transformata Z un instrument util pentru studiul sistemelor discrete LIT. Daca sistemul studiat este cauzal si nu are conditii initiale nule, este utila transformarea Z unilaterala.

Functia de sistem a unui sistem discret, liniar si invariant in timp



Functia H(z), numita "functia (de) sistem" sau "functia de transfer a sistemului" caracterizeaza complet comportarea sa în planul complex z, dupa cum raspunsul la impuls h[n] caracteriza complet comportarea sistemelor in timp.

Daca sistemul discret este stabil, exista si transformata Fourier in timp discret a lui *h[n]* si prin urmare cercul unitar este in domeniul de convergenta al functiei de sistem ce caracterizeaza un sistem stabil.

Daca sistemul este cauzal: $H_u(z) = H(z)$, atunci domeniul de convergenta al functiei este exteriorul unui disc.

Daca sistemul este stabil si cauzal, cercul unitar este in DC. Toti polii functiei sistem a unui sistem stabil si cauzal au modulul subunitar ceea ce este ehivalent cu faptul ca sunt cuprinsi în interiorul discului unitar.

Determinarea raspunsului unui sistem discret liniar si invariant în timp, utilizand transformarea Z

Daca *x[n]* este dat si se specifica *h[n]* ↔*H(z)* atunci se aplica semnalului de intrare transformarea directa rezultand *X(z)*. Raspunsul in complex este *Y(z)=H(z)X(z)*.

Aplicand transformarea Z inversa, rezulta semnalul raspuns, *y[n]*. Daca se lucreaza cu sisteme si semnale cauzale în conditii initiale nenule, se va utiliza numai transformarea Z unilaterala.

Calculul transformarii z inverse

Sunt aplicabile trei metode:

1. **Calculul direct al integralei,**
2. **Transformarea functiei *Y(z)* intr-o suma de fractii simple,**
3. **Metoda dezvoltarii functiei *Y(z)* in serie de puteri.**

2. Transformarea functiei *Y(z)* intr-o suma de fractii simple

Metoda se aplica in cazurile in care *Y(z)* este o functie rationala. Functia *Y(z)* poate fi un raport de polinoame în z^{-1} sau z. Recomandam sa se lucreze în z-1, notand

pentru comoditate $z^{-1} = x$, deoarece in majoritatea cazurilor tabelele sunt date în functie de puterile lui z^{-1}.

$$Y(x) = Y\left(z^{-1}\right) = \frac{N(x)}{D(x)} = I(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

$$I(x) = \sum_k c_k x^k = \sum_k c_k z^{-k} \leftrightarrow \sum_k c_k \delta[n-k]$$

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_m \frac{a_m}{x - x_m} + \sum_k \sum_{i=1}^{s_k} \frac{b_{ki}}{\left(x - x_k\right)^i}.$$

$$a_m = \left[\left(x - x_m\right) \frac{R(x)}{D(x)} \right]\Bigg|_{x = x_m};$$

$$b_{ki} = \frac{1}{\left(s_k - i\right)!} \left\{ \frac{d^{s_k - i}}{dx^{s_k - i}} \left[\left(x - x_k\right)^{s_k} \frac{R(x)}{D(x)} \right] \right\}\Bigg|_{x = x_k}.$$

Se aplica transformarea inversa fiecarui termen din suma, dupa ce se revine mai intai la $z^{-1} = x$, utilizand tabelele de transformate si tabelele de proprietati ale transformarii.

Exemple

1. $Y(z)=\dfrac{z}{(z-0.5)(z-0.25)}=Y_u(z)\Rightarrow \mathrm{DC}=\{z\,|\,|z|>0.5\}$

$$Y(z)=\frac{8z^{-1}}{(2-z^{-1})(4-z^{-1})}=\frac{8x}{(2-x)(4-x)}=\frac{8}{2-x}-\frac{16}{4-x};$$

$$Y(z)=\frac{8}{2-z^{-1}}-\frac{16}{4-z^{-1}}=\frac{4}{1-0{,}5z^{-1}}-\frac{4}{1-0{,}25z^{-1}}.$$

$$y[n]=4\left[(0{,}5)^n-(0{,}25)^n\right]\sigma[n].$$

2. Aceeasi transformata $Y(z)$ dar $\mathrm{DC}=\{z\,|\,|z|<0{,}25\}$

$$y[n]=-4\left[(0{,}5)^n-(0{,}25)^n\right]\sigma[-n-1].$$

3. Aceeasi transformata $Y(z)$ dar $\mathrm{DC}=\{z\,|\,0{,}25<|z|<0{,}5\}$

$$y[n]=-4(0{,}5)^n\sigma[-n-1]-4(0{,}25)^n\sigma[n].$$

Metoda dezvoltarii functiei *Y(z)* in serie de puteri

Dezvoltand $Y(z)$ in serie de puteri in jurul originii se obtine forma explicita a lui $y[n]$.

Exemple

a) $Y(z)=e^{z^{-1}}$, pentru $|z|>0$: $e^{z^{-1}}=1+\dfrac{1}{1!}z^{-1}+\dfrac{1}{2!}z^{-2}+\ldots+\dfrac{1}{n!}z^{-n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^{-n}$,

$$y[n]=\frac{1}{n!}.$$

b) $Y(z)=e^{z}$, pentru $|z|\geq 0$, cu exceptia punctului de la infinit, avem:

$$e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\ldots+\frac{1}{m!}z^m+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^m=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^{-n}=1+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-n)!}z^{-n}.$$

Rezulta din tabele:

$$y[n]=\delta[n]-\frac{1}{(-n)!}\sigma[-n-1]=\frac{1}{(-1)^n n!}\sigma[-n].$$

c) $Y(z) = ln\left(1 + az^{-1}\right)$, DC $= \{z \| z| > |a|\}$.

$$Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} z^{-n} \leftrightarrow y[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}\ ; n \geq 1.$$

Semnalul fiind cauzal, teorema valorii initiale da $y[0] = \lim_{z \to \infty} ln\left(1 + az^{-1}\right) = 0$ si in consecinta

$$y[n] = \frac{(-1)^n}{n} a^n \sigma[n-1].$$

d) $Y(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$, $|z| > |a|$.

Se efectueaza impartirea urmarind forma catului in z^{-1} deoarece transformata semnalului cauzal nu contine decat puterile negative ale lui z :

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - az^{-1} \\ \hline
-1 + az^{-1} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \ldots \\
/ \quad az^{-1} & \\
\quad -az^{-1} + a^2z^{-2} & \\
\quad / \quad a^2z^{-2} & \\
\qquad -a^2z^{-2} + a^3z^{-3} & \\
\qquad / \quad a^3z^{-3} & \\
\qquad\qquad \ddots &
\end{array}$$

Se obtine deci : $y[n] = a^n \sigma[n]$.

Daca $Y(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ este definita pentru $|z| < |a|$, semnalul corespunzator este anticauzal. Transformata sa contine numai puterile pozitive ale lui z. De aceea se scrie $Y(z) = \dfrac{z}{z - a}$ si se efectueaza impartirea sub forma :

$$\begin{array}{l|l}
z & -a + z \\ \hline
-z + a^{-1}z^2 & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - a^{-4}z^4 - \ldots \\
/ \quad a^{-1}z^2 & \\
\quad -a^{-1}z^2 + a^{-2}z^3 & \\
\quad / \quad a^{-2}z^3 & \\
\qquad -a^{-2}z^3 + a^{-3}z^4 & \\
\qquad / \quad a^{-3}z^4 & \\
\qquad\qquad \ddots &
\end{array}$$

Rezulta ca : $Y(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^m \overset{n=-m}{=} -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$ si in consecinta forma semnalului este $y[n] = -a^n \sigma[-n-1]$.

Sisteme discrete liniare si invariante in timp, caracterizate prin ecuatii cu diferente finite liniare si cu coeficienti constanti

$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$, $a_0 \neq 0$ Aplicand egalitatii transformata z bilaterala rezulta:

$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$, $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}} = \dfrac{N(z)}{D(z)}$. $H(z)$ este o fractie rationala in z sau z^{-1}.

Radacinile ecuatiei $N(z) = 0$ se numesc zerourile sistemului, radacinile ecuatiei $D(z) = 0$ se numesc polii sistemului. Daca sistemul este stabil si cauzal toti polii sai se gasesc in interiorul cercului unitar. In acest caz, conform teoremei valorii initiale: $h[0] = \lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \dfrac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow$ gradul numaratorului trebuie sa fie mai mic sau egal decat gradul numitorului.

Contributia polilor unui sistem discret cauzal in raspunsul la impuls al acestuia

Vom considera numai cazul polilor simpli si dubli, celelalte cazuri tratandu-se in mod identic.

1. Perechi de poli simpli complex conjugati; $z_p = r_p e^{j\Omega_p}$ si $z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$

Termenii corespunzatori in descompunerea lui $H(z)$ in fractii simple sunt:

$\ldots + \dfrac{a}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \dfrac{a^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \ldots$ iar contributia lor in $h[n]$ este de forma $A\sin(\Omega_p n + \Phi_n)$.

Daca $r_p < 1$, raspunsul se amortizeaza, perechea de poli nu confera instabilitate sistemului.

Daca $r_p > 1$, raspunsul creste exponential, sistem - instabil.

Caz aparte: poli simpli situati pe cercul unitar, Contributia lor la $h[n]$ este de forma: $A\sin(\Omega_p n + \Phi_p)$, oscilatie de amplitudine fixa (chiar si dupa disparitia excitatiei).

Stabilitate la limita - oscilator.

2. Poli dublii complex conjugati, $z_p = r_p e^{j\Omega_p}$ si $z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ sunt poli dublii,

Contributia lor la functia de transfer este de forma:

$$\ldots + \frac{a_1}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_1^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_2}{\left(1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \frac{a_2^*}{\left(1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \ldots$$

Contributia lor in raspunsul la impuls este de forma:

$$\left[A_1 r_p^n \sin\left(\Omega_p n + \Phi_p\right) + A_2 n r_p^n \sin\left(\Omega_p n + \Phi_p\right)\right]\sigma[n].$$

Daca $r_p < 1$, raspunsul este amortizat - sistem stabil.

Daca $r_p > 1$, raspunsul creste in timp - sistem instabil.

Calculul raspunsului unui SLIT discret caracterizat printr-o ecuatie cu diferente finite

Se considera SLIT necauzal, caracterizat de ecuatia cu diferente finite:

$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$, $a_0 \neq 0$, cu conditii initiale nenule.

Aplicand in ambii membri transformata Z unilaterala, Z_u, se obtine:

$\sum_{k=0}^{N} a_k Z_u\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k Z_u\{x[n-k]\}$ sau, pe baza proprietatilor acestei transformate:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y_u(z) + \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^n\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\left[X_u(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n] z^n\right]$$

Daca semnalul de intrare este cauzal, $x[-n] = 0$ pentru n > 0, si ecuatia devine:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y_u(z) + \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^n\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\left[X_u(z)\right].$$

Cunoscand $X_u(z)$ si conditiile initiale, se determina $Y_u(z)$ si apoi $y[n]$.

Exemplu

$y[n]-ay[n-1]=x[n]$, $x[n]=ke^{j\Omega_0 n}\sigma[n]$, $y[-1]\neq 0$,

$$Y_u(z)-az^{-1}\left(Y_u(z)+y[-1]z\right)=\frac{k}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}};\ |z|>1.$$

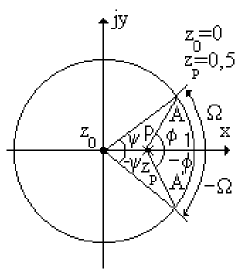
$$Y_u(z)=\frac{k}{\left(1-e^{j\Omega_0}z^{-1}\right)\left(1-az^{-1}\right)}+\frac{ay[-1]}{1-az^{-1}}=$$

$$=\frac{-ke^{j\Omega_0}}{a-e^{j\Omega_0}}\frac{1}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}}+\frac{ka}{a-e^{j\Omega_0}}\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{ay[-1]}{1-az^{-1}}.$$

$$y[n]=\left(a^{n+1}y[-1]+\frac{ka^{n+1}}{a-e^{j\Omega_0}}+\frac{ke^{j\Omega_0(n+1)}}{a-e^{j\Omega_0}}\right)\sigma[n];\ |a|<1,\ |z|>1.$$

Sisteme de ordinul I

$$y[n]-ay[n-1]=kx[n]\Rightarrow H(z)=\frac{k}{1-az^{-1}}=\frac{kz}{z-a};\ z\in \text{DC}.$$



$$h[n]=ka^n\sigma[n].\ H(\Omega)=\frac{\left|\overline{OA}\right|}{\left|\overline{PA}\right|}e^{j(\psi-\varphi)}=\frac{1}{\left|\overline{PA}\right|}e^{j(\Omega-\varphi)}.$$

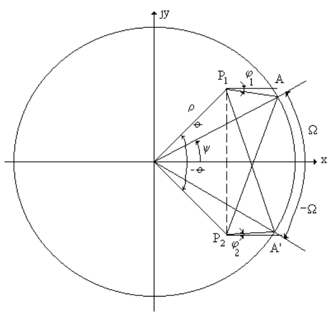
Daca $0<a<1$, maximul raspunsului in frecventa $\Rightarrow$ pentru $\left|\overline{PA}\right|$ minim, $\Omega=0$, filtru trece jos.

Daca $-1<a<0$, maximul rezulta pentru $\Omega=\pi$, filtru trece sus.

Sisteme de ordinul doi

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=kx[n]\Rightarrow H(z)=\frac{k}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\frac{kz^2}{z^2+a_1z+a_2}$$

Avem un zero de ordinul 2 in origine si polii $z_{p_{1,2}}=\dfrac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$.



Daca $a_1^2<4a_2$ cei doi poli sunt complex conjugati $z_{p_{1,2}}=\rho e^{\pm j\theta}$.

Daca $a_1^2\geq 4a_2$ polii sunt reali.

Se considera sistemul cauzal si se cauta conditiile pe care trebuie sa le indeplineasca coeficientii a_1 si a_2 pentru a obtine stabilitatea.

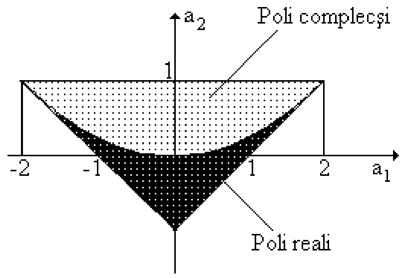
$$\rho=\frac{\sqrt{a_1^2+4a_2-a_1^2}}{2}=\sqrt{a_2}<1;\,a_1^2<4a_2\Rightarrow$$

$\Rightarrow|a_2|<1,\,a_2>\dfrac{a_1^2}{4}$ sau daca polii sunt reali:

$-2<-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}<2;\,a_1^2-4a_2\geq 0.$

Rezolvand sistemul de inegalitati rezulta:

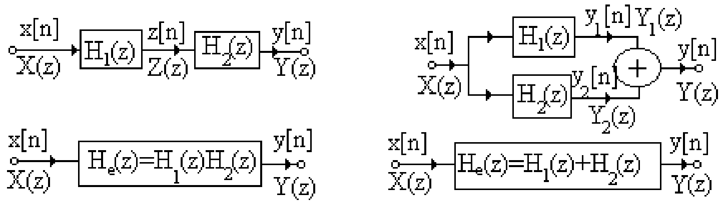
$a_1^2-4a_2\geq 0;\,a_2>-a_1-1;\,a_2>a_1-1.$



Parabola corespunde existentei unui singur pol real dublu.

Raspunsul in frecventa al sistemului: $H(\Omega)=k\dfrac{1}{\left|\overline{P_1A}\right|\left|\overline{P_2A}\right|}e^{j(2\Omega-\varphi_1-\varphi_2)}$.

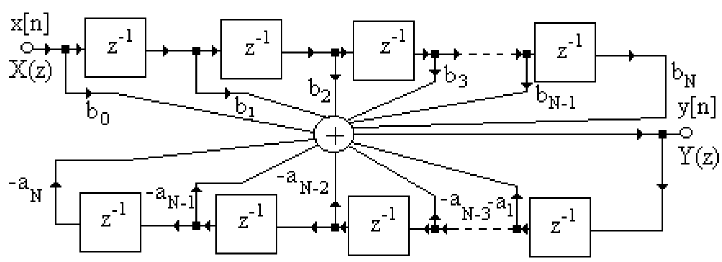
Functia de sistem echivalenta unor sisteme discrete conectate in serie si in paralel



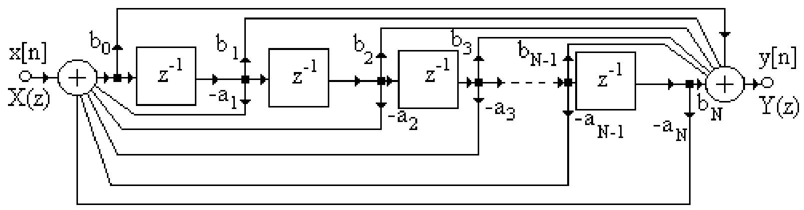
$$h_e[n] = h_1[n] * h_2[n];$$
$$H_e(z) = H_1(z) H_2(z).$$

$$h_e[n] = h_1[n] + h_2[n];$$
$$H_e(z) = H_1(z) + H_2(z).$$

Forme de implementare ale filtrelor numerice utilizand transformarea Z



Forma specifica de reprezentare a implementarii in forma directa I. S-a considerat a_0 = 1.



Forma specifica de reprezentare a implementarii in forma directa II. S-a considerat $a_0 = 1$.

Forma laticiala a unui filtru avand numai poli