# Cap.1. INTRODUCERE IN ANALIZA CIRCUITELOR

## 1.1. Semnale variabile, periodice, alternative. Curenţi alternativi

Termenul de semnal **variabil** îl vom considera ca referindu-se la orice semnal care variază in timp, de exemplu $s = s(t)$. Aceasta se aplica la orice tip de semnal: curent alternativ $i = i(t)$, forţa electromotoare alternativa (e.m.f.) $e = e(t)$, flux magnetic $\Phi = \Phi(t)$, si altor mărimi electrice (tensiunea, etc.) si magnetice. In continuare vom considera ca exemplu de semnal reprezentativ curentul. Sunt definiţii care atribuie termenul de **curent alternativ** curenţilor variind periodic si a căror valoare medie, luata pe un ciclu complet al variaţiei, este egala cu zero (sau in unele cazuri este foarte mica in comparaţie cu valoarea instantanee a curentului). Pentru ca vom discuta mai târziu despre curenţi **"neperiodici"**, este preferabila adoptarea unei definiţii mai generale.

Fig.1.1. ilustrează dependenta de timp a curenţilor alternativi pentru diferite forme de unda. Un curent alternativ care variază cu timpul astfel ca oricare din valorile sale se repeta la intervale regulate de timp **T**, este numit **curent periodic**. Câţiva curenţi periodici tipici sunt prezentaţi in fig.1.1.(a la c). Curenţii din fig.1.1.(d si f) nu sunt periodici in domeniul graficului. Aceasta nu exclude posibilitatea ca ei sa fie periodici daca se ia in considerare o perioada mai lunga de timp.

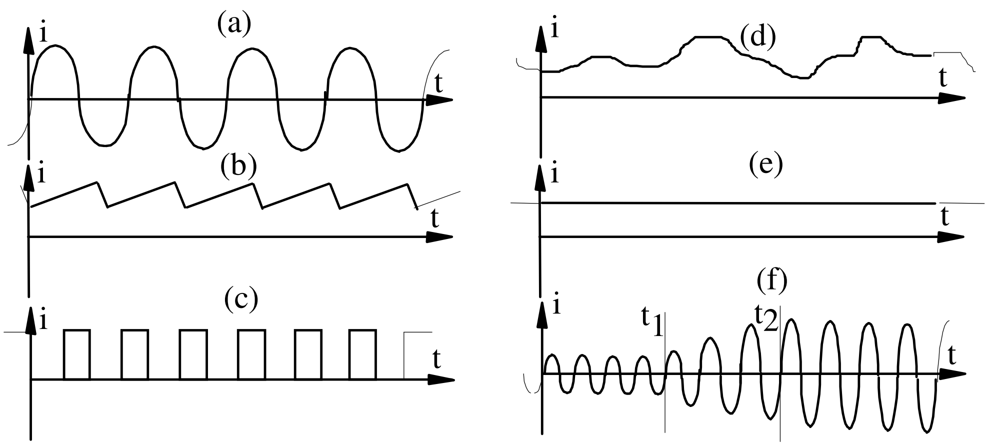


Fig.1.1. Curenţi alternativi cu diferite forme de unda

Un curent continuu (fig.1.1.e) poate fi privit ca si un caz limita a unui curent alternativ pentru care **i(t) = ct.** Prin definiţie un curent periodic are ecuaţia:

$$i(t) = i(t+T) \qquad (1.1)$$

unde $T = ct$ este perioada de timp ceruta pentru un ciclu complet de variaţie (inversul $1/T=f$ dă frecvenţa oscilaţiilor curentului) si f poate lua orice valoare imaginabila. Dar trebuie notat ca toate procesele ce apar in natura au totdeauna un început si un sfârşit distinct. Strict vorbind, nu exista in mod real, procese periodice infinite si curenţi continuu infiniţi.

In practica, orice curent electric ce satisface ecuaţia (1.1) pe un interval de timp finit si suficient de lung, poate fi sigur tratat ca un curent periodic. Rezulta ca teoremele si metodele analizei circuitelor dezvolta procedee din definiţia generala a curenţilor periodici (spre exemplu, metoda analizei spectrale de frecventa) aplicata proceselor actuale doar in intervalul unor limite specificate.

Ca un exemplu, se poate vedea ca procesele prezentate in fig.1.1.f sunt definite ca neperiodice. Cu toate ca pentru $t > t_2$ valorile instantanee ale curenţilor (sau a oricărei alte mărimi) sunt prezentate ca repetându-se la intervale de timp si pentru aceasta, procesele începute la $t = t_2$ se prezintă ca fiind procese staţionare (steady - state). Evident, un curent periodic este inevitabil o stare staţionara sau simplu curent staţionar.

Se poate arata de asemenea din acelaşi exemplu ca valoarea maxima instantanee a curentului este subiectul unor variaţii continue de la $t = t_1$ la $t = t_2$. In acest interval de timp procesul este cunoscut ca un proces **nestabil** sau **proces tranzitoriu.**

In viitor vom considera ca valorile instantanee ale curentului alternativ nu se schimba foarte rapid sau, si mai exact, nu au timp sa varieze considerabil (notabil) in cursul propagării perturbaţiei electromagnetice in lungul unui circuit electric dat. In acest caz, curentul poate fi considerat ca fiind egal cu valoarea instantanee in oricare punct al elementului de circuit considerat. Din aceasta rezulta, in particular, ca orice deducţii rezultând referitor la circuite electrice de mare extensie sunt adevărate doar pentru curenţi lent variabil in timp. Un curent alternativ care satisface aceste cerinţe este numit **curent cvasi-staţionar.**

Conceptul de curent cvasi-staţionar este de foarte mare importanta pentru ca permite aplicarea legilor lui Ohm si Kirchhoff, enunţate pentru curenţi continui, la valori instantanee ale curenţilor alternativi.

De altfel, acest concept permite de asemenea examinarea performantelor întregului circuit pe aceeaşi cale ca pentru curentul continuu.

Când condiţiile pentru cvasi-stabilitate nu sunt observate, legile curentului continuu sunt aplicabile doar la acele parţi ale circuitului electric pentru care acestea rămân valabile.

### 1.2. Elemente de circuit

Elementele de circuit electric sunt clasificate ca **rezistive** prezentând doar proprietati de **rezistenta** si **reactive** posedând doar **reactanţa**. Al doilea grup acoperă bobinele inductive si condensatorii, având reactante capacitive si inductive.

Elementele rezistive de circuit sunt cele in care fluxul de curent produce doar o irecuperabila pierdere de energie, pe când in toate elementele reactive de circuit nu exista aceasta pierdere.

Fluxul de curent produce o diferenţa de potenţial in lungul elementelor de circuit, mărimea acestei diferenţe depinzând de valoarea curentului. Cu alte cuvinte, ele împiedica trecerea curentului prin circuit si pentru acest motiv sunt numite *in ansamblu* **impedanţe,** termen care poate fi limitat in cazuri speciale la o **rezistenta,** o **inductanţa**, la o **capacitate**, sau la fel de bine **la o combinaţie a acestora.**

Trebuie notat, totuşi, ca conceptul de element de circuit posedând doar rezistenta, inductanţa, sau capacitate este puţin cam fals, întrucât toţi trei parametri sunt prezenţi, fiecare cu o extindere mai mare sau mai mica. O bobina inductiva, spre exemplu, fiind făcuta dintr-un conductor cu o anumita conductivitate, întotdeauna poseda o anumita rezistenta. In acelaşi timp ca orice corp metalic, acesta are o anumita capacitate. Pe de alta parte, un condensator prezintă intr-un anumit grad, de multe ori foarte mic, o inductanţa, întrucât este format din conductori individuali inconjurati de un câmp magnetic creat de deplasarea de sarcina din interiorul lor. Energia pierduta in dielectricul capacitatii se transforma integral in căldura, si drept consecinţa, este de nerecuperat ca si in cazul rezistentei. Pentru considerente similare se poate arata ca orice bucata de conductor, prezintă o anumita inductanţa si capacitate in plus fata de rezistenta sa.

Normal, aceasta face mult mai dificila examinarea exacta a comportamentului unui curent alternativ in aceste elemente reale de circuit. Practic, dificultatea este depasita având de-a face cu elemente de circuit in care unul din parametri este predominant astfel ca ceilalţi doi pot fi ignoraţi fara sa afecteze semnificativ rezultatele calculelor circuitului. In aceste condiţii, elementul de circuit poate fi tratat ca un element **ideal** posedând doar rezistenta, inductanţa sau capacitate.

Când o astfel de simplificare este nepermisa din anumite considerente, elementul de circuit este reprezentat printr-un circuit echivalent alcătuit dintr-un număr de elemente ideale. Spre exemplu, un condensator cu pierderi de energie care nu pot fi neglijate si o bobina inductiva cu o rezistenta considerabila, pot fi reprezentate prin circuitele echivalente prezentate in fig.1.2a. Aceste circuite nu sunt chiar complete întrucât nu ţin cont de capacitatea spirelor bobinei si de inductanţa elementelor constructive ale condensatorului. In cazurile unde aceşti parametrii sunt daţi datorita anumitor consideraţii (spre exemplu când ne ocupam cu curenţi de înalta frecventa), circuitele echivalente devin mai complicate (ca in fig.1.2b).

Folosirea circuitelor echivalente face studiul proceselor ce apar in circuite electrice mult mai uşor, fiind suficient sa folosească doar trei elemente ideale de circuit **R,L,C** si sa trateze toate celelalte cazuri ca diverse combinaţii ale acestor trei tipuri de elemente, cu toate ca pentru scopuri practice nu toate trei tipurile trebuie sa fie prezente in fiecare circuit.

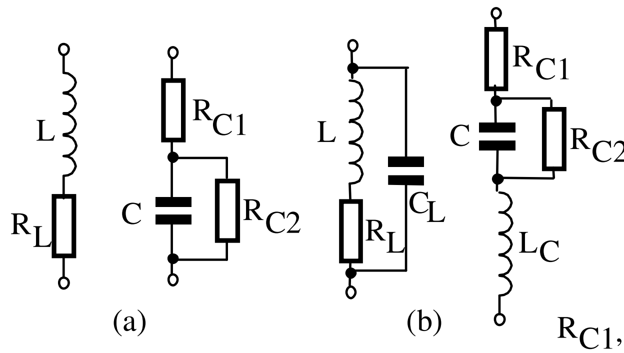


Fig.1.2. Reprezentarea ca circuit echivalent a unei inductante si a unui condensator folositi in:
(a) circuite de medie frecventa
(b) circuite de inalta frecventa
L-inductanta bobinei
C-capacitatea condensatorului
$R_L$-rezistenta bobinei
$C_L$-capacitatea spirelor bobinei
$L_C$-inductanta condensatorului
$R_{C1}$,$R_{C2}$-rezistenta condensatorului

Elementele de circuit se clasifica in doua grupuri distincte: **cu caracteristici liniare si neliniare.** Daca impedanţa elementului de circuit este independenta de mărimea curentului sau diferenţei de potenţial produsa de curent in lungul elementului, acesta este numit *element liniar de circuit*. Curentul intr-un astfel de element este direct proporţional cu diferenţa de potenţial si procesele ce au loc in circuite alcătuite din astfel de elemente sunt descrise cu ecuaţii algebrice liniare sau ecuaţii diferenţiale derivate din legile lui Kirchhoff.

In multe cazuri, impedanţa elementului de circuit luat in consideraţie este supusa variaţiei cu curentul sau diferenţa de potenţial. Aceste elemente de circuit sunt *numite neliniare* si procesele din circuit sunt descrise cu ecuaţii neliniare.

In general, toate elementele de circuit sunt mai mult sau mai puţin neliniare si pot fi tratate ca liniare intr-o anumita aproximaţie doar intr-un domeniu specificat de curent sau diferenţa de potenţial, care depinde mult de condiţiile reale ale experimentului si de acurateţea impusa experimentului. Astfel, rezistenta unui conductor metalic ordinar rămâne practic constanta in cazul curenţilor mici, dar creste când trec curenţi mari. Aceasta creştere in rezistenta este datorata încălzirii conductorului datorita curentului. Schimbarea in temperatura cauzata de un curent mic (prin mic se intelege o densitate de curent mica in conductor) este atât de mica încât este practic depasita de mulţi alţi factori predominanţi cum ar fi modificarea temperaturii ambiante, încălzirea prin radiaţie si in mod normal nu este luata in consideraţie.

Impedanţa unui element de circuit poate de asemenea sa varieze sub acţiunea unor factori externi, independenţi de curentul sau diferenţa de potenţial din circuit. Elementele de circuit cu un astfel de parametru variabil (impedanţa) sunt numite *elemente parametrice*. Sa dam un exemplu: un reostat cu cursor este un element de circuit liniar la fluxuri de curent mici, dar când rezistenta sa este variata prin deplasarea cursorului el devine un element parametric întrucât mărimea curentului va depinde de poziţia cursorului.

Neliniaritatea rezistentei, inductanţei sau capacitatii face ca analiza performantelor circuitului sa nu fie uşoara întrucât soluţia ecuaţiilor neliniare reprezintă o problema serioasa. Elementul de circuit este considerat a fi liniar atâta timp cât neliniaritatile se pot neglija in limitele de variaţie ale curentului sau diferenţei de potenţial. O astfel de aproximaţie, poate, bineînţeles sa aibă un efect negativ in rezultatele calculelor de circuit. Din acest punct de vedere, valabilitatea lor este necesar sa fie testata pentru fiecare caz specific.

### 1.3. Legile fundamentale ale circuitelor

Problemele legate de circuite sau reţele de curent continuu, conţinând doar rezistente pure pot fi uşor soluţionate recurgând la **legea lui Ohm** in forma sa generala:

$$I = \frac{V_1 - V_2 + E}{R}$$

unde: I $\rightarrow$ curentul in porţiunea de circuit electric data

$(V_1-V_2)$ → diferenţa de potenţial pe porţiunea de circuit considerata
E → t.e.m. totala ce actioneaza in porţiunea de circuit data
R → rezistenta porţiunii de circuit

Aceeaşi ecuaţie poate fi folosita pentru rezolvarea problemelor circuitului de curent alternativ impunând condiţia de cvasi-staţionaritate.

Făcând uz de ecuaţia (1.2) putem analiza modul de lucru al unui circuit complicat construit din **n** secţiuni sau ramuri, scriind **n** ecuaţii ce conţin **2n** necunoscute. In sensul rezolvării acestui set de ecuaţii, este necesar de stabilit **n** condiţii independente corelând curenţii si tensiunile diverselor ramuri ale circuitului considerat, aceasta se dovedeşte adesea a fi o problema foarte complicata.

Analiza circuitelor electrice de orice configuraţie si complexitate este mult simplificata prin aplicarea legilor lui Kirchhoff. Prima lege a lui Kirchhoff (a curentului) corelează curenţii care se întâlnesc la un punct de joncţiune sau **nod** al circuitului si este exprimata matematic ca:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

Curenţii care intra intr-o joncţiune sunt consideraţi pozitivi, iar cei ce parasesc joncţiunea negativi.

Legea a doua a lui Kirchhoff (a tensiunii) afirma ca suma algebrica a tuturor căderilor de tensiune pe un circuit simplu închis (ochi de reţea) este egala cu suma algebrica a t.e.m. din acel ochi de reţea:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

Aici curenţii sunt consideraţi ca pozitivi daca au sensul unei direcţii arbitrare de însumare in jurul circuitului (ochiului) considerat iar t.e.m. sunt considerate pozitive daca produc o cădere de tensiune in aceeaşi direcţie.

Ecuaţiile ce rezulta din legile lui Ohm si Kirchhoff pot fi de asemenea scrise pentru valorile instantanee ale curentului alternativ cvasi-staţionar.

In multe cazuri relaţia dintre curentul printr-o rezistenta si căderea de tensiune pe aceeaşi rezistenta, spre exemplu: caracteristica volt-amperica a unei rezistente **$i(v) = v/R$,** poate fi găsita mult mai uşor recurgând la metode grafice de calculare. Când R = ct. caracteristica este o linie dreapta trecând prin origine la un unghi $\alpha$ cu axa absciselor si cu $tg\ \alpha = i/v = 1/R$ (fig.1.3a).

Caracteristica unei rezistente neliniare este reprezentata de o curba cu o forma mai mult sau mai puţin complicata (fig.1.3b). Modul in care curentul variază cu timpul poate fi stabilit din caracteristica volt-amperica a rezistentei, eliminând valorile instantanee ale tensiunii de pe axa absciselor si reprezentând valorile instantanee ale curentului in funcţie de timp. Practic aceasta se obţine aranjând axele de coordonate pentru tensiune si pentru curent paralele cu respectivele axe ale caracteristicii de rezistenta (volt-amperice).

Variaţiile de curent si tensiune in circuite complexe pot fi uşor reprezentate grafic substituind un grup de rezistente din circuit printr-o rezistenta echivalenta si lucrând cu caracteristica volt-amperica echivalenta. Printr-o rezistenta echivalenta se intelege una care nu afectează curenţii si tensiunile altor elemente de circuit, orice extensie ar avea in circuitul considerat (analizat).

Caracteristicile echivalente nu sunt utilizate prea des in analiza circuitelor liniare întrucât ecuaţiile liniare obţinute din legile lui Kirchhoff pentru aceste circuite sunt uşor de rezolvat. Legea de variaţie a rezistentei R cu timpul, pentru circuite neliniare, este data uzual intr-o forma tabelata sau prin reprezentare grafica. In astfel de cazuri caracteristicile echivalente sunt foarte utile.

Suplimentar ecuaţiilor ce corelează curenţii, tensiunile si rezistentele din circuit, este necesar de introdus ecuaţii pentru calcularea puterii dezvoltate de curenţii din circuit. Puterea dezvoltata intr-un circuit se ştie ca este determinata prin oricare din următoarele ecuaţii:

$$\mathbf{p = iv = v^2 / R = i^2R}$$

Sa consideram cazul circuitelor pur inductive si capacitive unde legătura dintre curent si tensiune este mult mai importanta ca in circuitele rezistive.

Orice variaţie a unui curent intr-o bobina inductiva este ştiut ca da naştere la o t.e.m. indusa exprimata matematic ca:

$$e_L = -L\frac{di}{dt}$$

(O relaţie similara se aplica la circuitele cuplate magnetic L → M (inductanţa mutuala)).

In cazul conectării unei bobine (inductanţe) la o sursa externa cu t.e.m. "e", următoarele ecuaţii pot fi scrise din legea de tensiune a lui Kirchhoff pentru valorile instantanee ale tensiunilor electromotoare acţionând in acest circuit:

$$e + e_L = 0 \qquad (1.5)$$

unde este evident ca: e = L(di/dt).

Prin integrare, putem găsi curentul prin bobina:

$$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} e dt$$

Un set similar de ecuaţii poate fi scris pentru un circuit pur capacitiv străbătut de un curent **i**. Orice modificare in tensiunea de pe plăcile condensatorului este ştiut ca produce o modificare corespunzătoare in sarcina **q** de pe condensatorul de capacitate **C**:

$$dv_c = \frac{dq}{C}$$

Pe de alta parte: dq = idt

Atunci: $dv_C$= (1/C) i dt

de unde diferenţa de potenţial este găsita ca:

$$v_c = \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} idt = \frac{1}{C}\int idt + A \qquad (1.6)$$

si curentul ca :

$$i = C\frac{dv_c}{dt}$$

Aceste relaţii permit scrierea ecuaţiilor legilor lui Kirchhoff, pentru circuite inductive si capacitive de orice configuraţie si complexitate.

Formal, consideram ca un curent alternativ produce o cădere de tensiune $\mathbf{v_L}$ pe bobina inductiva .

In acord cu legea a II-a a lui Kirchhoff:

$$\mathbf{e = v_L}$$

si in consecinţa rezulta din ecuaţia (1.5) ca:

$$v_L = -e = L\frac{di}{dt} \qquad (1.7)$$

Pornind de la ecuaţia de mai sus, se poate arata ca bobina inductiva (inductanţa) are reactanţa inductiva nula in curent continuu, deoarece di/dt =0 si $v_L$ = 0 cu i = ct. In contrast, condensatorul va fi de reactanţa capacitiva infinit de mare la o tensiune continua externa aplicata deoarece $dv_C/dt = 0$ si $i_C = 0$ când $v_C$ = ct.

Derivatele di/dt si $dv_C/dt$ iau valori mari in cazul unor curenţi si tensiuni rapid variabile in circuite inductive si capacitive. In aceste condiţii, reactanţa inductiva a bobinei creste cu cât căderea de tensiune $v_L$ = L(di/dt) pe ea devine mai mare.

Când o t.e.m. rapid variabila este aplicata unui condensator, curentul i = C($dv_C$/dt) creste si in consecinţa, reactanţa capacitiva scade.

### 1.4. Unele proprietati ale circuitelor R-L si R-C

Acest subcapitol se ocupa in primul rând de efectul elementelor de circuit capacitive si inductive asupra formei de unda, a curentului si tensiunii alternative a circuitului si contribuie la studiul curenţilor sinusoidali discutaţi in următorul subcapitol. In plus, circuitele discutate in acest capitol sunt utilizate in toate tipurile de echipamente radio-TV.

Circuitele serie R-L si R-C din fig.1.4 sunt cele mai simple si cele mai frecvent întâlnite in reţelele electrice. Se poate arata ca in anumite cazuri valorile instantanee ale tensiunii pe elementele acestor circuite variază cu timpul aproximativ direct proporţional cu derivata sau integrala funcţiei care determina variaţia in timp a t.e.m. externe aplicate.

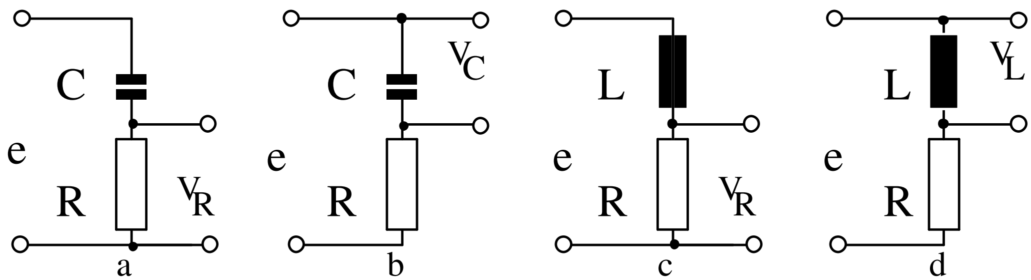


Fig.1.4. Exemple de circuite simple pentru diferentiere si integrare

Aplicând o t.e.m. externa **"e"** la bornele circuitului prezentat in fig. 1.4a căderea de tensiune pe rezistenta **R** va fi:

$$v_R = iR$$

Curentul este acelaşi in toate elementele circuitului serie si poate fi găsit din $\mathbf{v_C}$ ca:

$$i = C\frac{dv_C}{dt}$$

Atunci: $$v_R = RC\frac{dv_C}{dt} \qquad (1.8)$$

Pentru acest circuit legea a II-a a lui Kirchhoff da:

$$v_R + v_C = e$$

de unde: $$v_C = e - v_R$$

Substituind $v_C$ in ecuaţia (1.8) găsim:

$$v_R = RC\left(\frac{de}{dt} - \frac{dv_R}{dt}\right)$$

Evident in cazurile in care : $$\left|\frac{dv_R}{dt}\right| \langle\langle \left|\frac{de}{dt}\right| \qquad (1.9)$$

tensiunea la bornele rezistentei R este aproximativ proporţionala cu derivata t.e.m. aplicata din exterior.

Deci: $$v_R \approx RC\frac{de}{dt} \qquad (1.10)$$

Sa estimam in continuare efectul valorii lui **RC** in ceea ce priveşte acurateţea *diferenţierii.* Considerând ca inegalitatea (1.9) este adevărata pentru circuitul considerat si este realizata o diferenţiere aproximativa, sa substituim ecuaţia (1.10) in ecuaţia (1.9). Ca urmare obţinem următoarea inegalitate:

$$RC\left|\frac{dv_R}{dt}\right| \langle\langle v_R$$

Aceasta ultima inegalitate poate fi oricând intensificata prin reducerea valorii lui RC. Cu alte cuvinte, la valori mai mici RC, diferenţierea este tot mai corecta, aceasta fiind insotita de descreşterea in valoare a căderii de tensiune pe rezistenta "$v_R$".

Căderea de tensiune pe condensatorul din fig.1.4b poate fi găsita din următoarea ecuaţie:

$$v_c = \frac{1}{C}\int_{to}^{t} i dt$$

Curentul din circuit (egal cu cel prin rezistenta R) este dat de:
$i = v_R/R$ , iar din a doua lege a lui Kirchhoff $v_R = e - v_c$ , de unde:

$$v_c = \frac{1}{RC}\left[\int_{to}^{t} e dt - \int_{to}^{t} v_c dt\right]$$

Daca următoarea condiţie este satisfăcuta:

$$\left|\int_{t_o}^{t} v_c dt\right| << \left|\int_{t_o}^{t} e dt\right| \qquad (1.11)$$

tensiunea $v_c$ de pe condensator va fi:

$$v_c \approx \frac{1}{RC}\int_{to}^{t} e dt \qquad (1.12)$$

Efectul parametrilor circuitului asupra acuratetii integrării poate fi estimat pe aceeaşi cale ca pentru cazul diferenţierii. Considerând ca inegalitatea (1.11) este satisfăcuta si substituind ecuaţia (1.12) in ecuaţia (1.11) găsim:

$$\frac{1}{RC}\left|\int_{to}^{t} v_c dt\right| \langle\langle |v_c|$$

Astfel acurateţea integrării se imbunatateste cu creşterea lui RC - aceasta este evidenta din relaţia (1.12) - de asemenea fiind acompaniata de o descreştere in valoarea tensiunii $v_c$ .

Rezultate similare sunt obţinute pentru cazul circuitelor R-L, circuite prezentate in fig.1.4 (c si d).

Totuşi circuitele R-C sunt preferabile pentru integrare si diferenţiere pentru ca ele sunt mult mai compacte si simple ca circuitele R-L.

Astfel, se poate arata ca legea după care variază in timp curentul si tensiunea acestor circuite simple de egalizare poate sa arate foarte apropiat de integrarea si diferenţierea matematica.

Circuitele de integrare, sau mai simplu **integratorii,** au multe aplicaţii in electronica. In continuare sunt date câteva exemple ale utilizării lor.

1) Circuitele de integrare sunt folosite pentru a contoriza numărul de pulsuri date de unele dispozitive in unitatea de timp. Aceasta este obţinuta prin măsurarea tensiunii pe condensatorul circuitului de integrare si găsirea sarcinii totale produse de pulsurile incidente.

2) Circuitele de integrare servesc adesea pentru detectarea semnalelor slabe recepţionate împreuna cu semnale aleatoare (haotice) de interferenţa. Daca valoarea medie a semnalelor de interferenţa $\mathbf{e_i(t)}$ tinde la zero cu creşterea timpului de mediere, iar valoarea medie a semnalului util $\mathbf{e_u(t)}$ este diferita de zero, tensiunea de ieşire a circuitului de integrare va fi:

$$V_{out} \approx \frac{1}{RC}\int_{0}^{t} e_{in}(t) dt$$

unde semnalul de intrare $\mathbf{e_{in}(t)}$ este egal cu: $\mathbf{e_{in}(t) = e_u(t) + e_i(t)}$
dar cu: $\mathbf{e_u(t) = 0}$ când $\mathbf{t < t_1}$
$\mathbf{e_u(t) = e_o}$ când $\mathbf{t > t_1}$

Substituind $\mathbf{e_{in}(t)}$ in integrala avem:

$$RCV_{out} \approx \int_0^t e_u(t)dt + \int_0^t e_i(t)dt \approx A + \delta$$

unde A este o constanta si δ este o cantitate infinit mica.

Pentru ca $A \neq 0$ si $\delta \to 0$, inegalitatea $\delta << A$ va fi satisfăcuta dând lui **t** o valoare suficient de mare. In aceste condiţii, semnalul util A este mult mai uşor de separat de interferenţe, ca in figura 1.5.

3) O utilizare intensiva a integratorilor este in sisteme automate de control, calculatoare, etc.

In perspectiva unor astfel de largi aplicaţii ale circuitelor de integrare, trebuie studiate metodele, mijloacele prin care separarea semnalelor prin astfel de circuite (descrise mai sus) poate fi imbunatatita. Acest lucru va fi făcut in următoarele paragrafe după trecerea in revista a unor metode speciale de analiza a circuitelor.

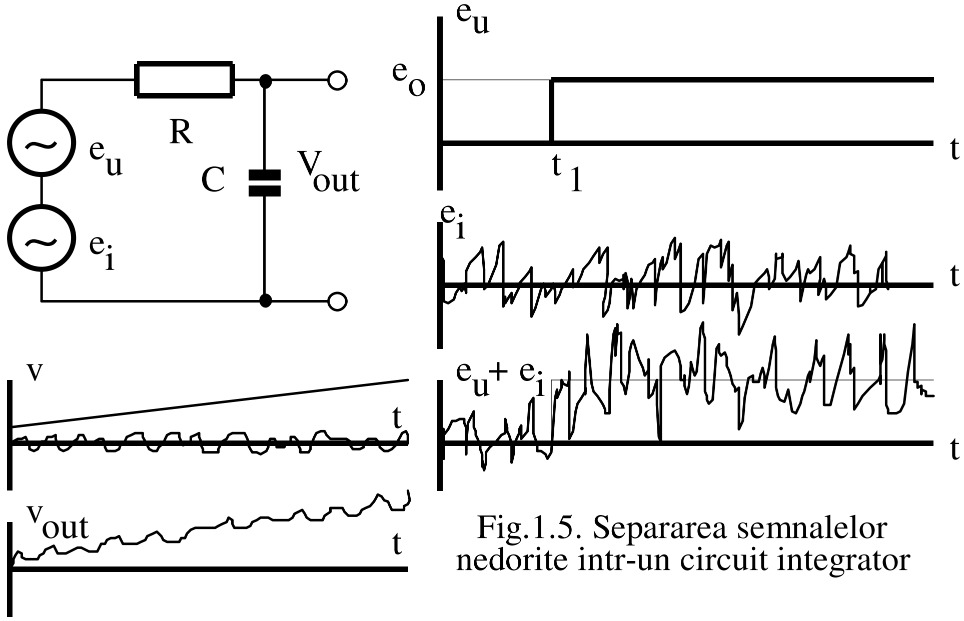


Fig.1.5. Separarea semnalelor nedorite intr-un circuit integrator

### 1.5. Semnale sinusoidale. Curenţi sinusoidali

Din considerente economice, curenţii alternativi variind sinusoidal cu timpul sunt folosiţi in majoritatea instalaţiilor industriale electrice.

Cel mai eficient este un curent alternativ care rămâne de aceeaşi forma de unda in orice ramura a reţelei electrice, oricât de complicata ar fi reţeaua. Un astfel de curent este mult mai complet folosit in orice punct chiar daca reţeaua conţine elemente capacitive si inductive, răspunzătoare pentru modificarea formei de unda prin diferenţiere si integrare cum s-a descris in paragraful precedent.

Alt factor important este metoda uşoara de producere a curentului alternativ de conductori rotativi cu viteza unghiulara constanta in câmpul magnetic al maşinilor electrice. Aceste maşini generează un curent periodic.

Singura funcţie periodica reproductibila la repetate diferenţieri si integrări este o funcţie sinusoidala (si, pentru a fi mult mai exacţi, o funcţie cosinusoidala, întrucât tranziţia la aceasta funcţie înseamnă doar ca faza curentului alternativ a fost modificata printr-un unghi π/2). Aşadar, curentul alternativ utilizat pentru scopuri industriale este aproape întotdeauna de forma sinusoidala (se considera ca circuitul este alcătuit din elemente **liniare**; se va arata ca forma de unda a oricărui curent se modifica in elemente de circuit neliniare) descrisa de următoarea ecuaţie: $\mathbf{i = I_m \sin(\omega t + \varphi_o)}$ unde $I_m$, $\omega = 2\pi f$ si $\varphi_o$ sunt cantitati constante (pe viitor toate mărimile electrice ce variază cu timpul: curenţi, tensiuni, t.e.m., etc., vor fi notate prin litere mici, ca distincţie de valorile constante ale acestor mărimi notate cu litere mari).

O caracteristica a curenţilor alternativi care-i face mult mai utilizabili pentru scopuri industriale (fata de curenţii continui) este abilitatea lor de a fi uşor transformaţi si distribuiţi la consumatori folosind efectul inducţiei electromagnetice (transformatoare, etc.). In perspectiva numeroaselor si extensivelor aplicaţii ale curenţilor sinusoidali, o cunoaştere amanuntita a proprietatilor lor de baza este indispensabila. Aceasta cunoaştere este de asemenea necesara pentru o mai buna intelegere a comportamentului curenţilor de forma complexa in circuite liniare, problema tratata in viitor.

Un curent sinusoidal alternativ este definit prin amplitudinea sa, sau valoarea de vârf $\mathbf{I_m}$, frecventa **f** si unghiul de faza sau simplu **faza** $\boldsymbol{\varphi}$. Faza, in general este un termen care se aplica pentru starea unui proces la un anumit moment de timp. In ingineria electronica, cuvântul este utilizat in conexiune cu curenţii sinusoidali pentru a nota o cantitate matematica ce determina in mod neechivoc valoarea curentului la un moment de timp dat (aceasta cantitate fiind variabila independenta sau argumentul funcţiei trigonometrice). Ca o regula, aceasta cantitate este calculata de la cel mai apropiat punct precedent al undei la care curentul trece prin zero si devine pozitiv. Astfel, faza unui curent sinusoidal ($I_m$ =ct.) este exprimata matematic ca $\varphi = \omega t+\varphi_o$ si faza iniţiala la t = 0 este reprezentata prin $\varphi_o$.

Faza iniţiala depinde de punctul de pe unda la care originea timpului (axa de referinţa a timpului) a fost aleasa. Spre exemplu, sa consideram ca originea timpului a fost schimbata in urma cu $\Delta t$ si in consecinţa t este substituit in ecuaţie prin $t' = t+\Delta t$. In acest caz $\mathbf{\sin(\omega t+\varphi_o)}$ devine $\mathbf{\sin\omega[(t'-\Delta t)+\varphi_o] = \sin[\omega t'+(\varphi_o-\omega\Delta t)]}$ si faza iniţiala va fi: $\mathbf{\varphi_o-\omega\Delta t}$.

Faza iniţiala nu este importanta când investigam un proces cvasi-staţionar singular deoarece originea timpului poate fi întotdeauna aleasa astfel ca $\varphi_o-\omega\Delta t = 0$. Daca ne ocupam de doua sau mai multe procese, originea timpului poate fi aleasa intr-o maniera similara doar pentru unul din procese. Atunci faza iniţiala a celui de-al doilea proces va diferi, in consecinţa de a primului. In astfel de cazuri, procesele sunt cu "diferenţa de faza" sau sunt "defazate" (out of phase).

Pentru doua procese cu aceeaşi frecventa:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

diferenţa de faza va fi: $\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_1) - (\omega t+\varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2$

Orice deplasare a originii pe axa timpului afectează faza iniţiala $\varphi_o$ a tuturor proceselor cu un interval egal. Astfel, diferenţa lor de faza nu depinde de punctul ales ca origine a timpului.

Pentru a reaminti definiţiile altor caracteristici ale curentului alternativ sa spunem ca **"frecventa"** este egala cu numărul de cicli compleţi executaţi pe secunda si ca inversul sau este **"perioada"** (f=1/T); iar amplitudinea este valoarea maxima atinsa de curentul sinusoidal in cursul unei perioade. Evident frecventa si amplitudinea curentului alternativ sinusoidal sunt prin definiţie cantitati pozitive.

Pentru a examina (studia) efectele produse de un curent sinusoidal in elemente de circuit: rezistive, inductive si capacitive, vom substitui funcţia sa $\mathbf{i = I_m \sin\omega t}$ in ecuaţia $\mathbf{v_R = iR}$ si in ecuaţiile (1.6) si (1.7).

In cazul rezistentei vom avea:

$$v_R = RI_m \sin\omega t = V_m \sin\omega t$$

unde am notat: $V_m = RI_m$ (1.13a)

In cazul unei bobine inductive ($v_L = L(di/dt)$), găsim:

$$v_L = \omega LI_m \cos\omega t = V_m \cos\omega t$$
$$V_m = \omega LI_m = X_L I_m$$

unde $X_L = \omega L$ (1.13b)

este **"reactanţa inductiva"** a bobinei.

In cazul unui condensator ($v_C = 1/C \int idt + A$):

$$v_C = -\frac{I_m}{\omega C}\cos\omega t = -V_m \cos \omega t$$

$$V_m = I_m/(\omega C) = X_C I_m$$

unde $X_C = 1/\omega C$ (1.13c)

este **"reactanţa capacitiva"** a condensatorului.

Reactanţele capacitive si inductive sunt măsurate ca si rezistentele in ohmi (Ω).

Valoarea constantei A depinde de punctul undei ales ca origine a timpului, acest punct determinând valoarea tensiunii pe condensator la momentul $\mathbf{t_o}$:

$$v_C - A = - I_m/(\omega C) \cos\omega t_o$$

unde, după cum rezulta din soluţia integralei definite:

$$I_m/(\omega C) \cos\omega t_o = A$$

Întrucât partea variabila a ecuaţiei este independenta de A, vom considera in continuare ca atunci când $t = t_o$ constanta A = 0.

In acest caz: $v_C = -(I_m/\omega C) \cos\omega$

De mare importanta este faptul ca tensiunea aplicata bobinelor inductive sau condensatoarelor diferă in faza de curentul ce trece prin aceste elemente de circuit.

Într-adevăr, daca toate ecuaţiile de mai sus sunt rescrise pentru aceeaşi funcţie:

- **curentul in circuit** va fi**:** $\mathbf{i = I_m \sin\omega t}$
- **tensiunea pe rezistenta:** $\mathbf{v_R = v_{Rm} \sin\omega t}$
- **tensiunea pe inductanţa:** $\mathbf{v_L = V_{Lm} \sin(\omega t+\pi/2)}$
- **tensiunea pe condensator:** $\mathbf{v_C = V_{cm} \sin(\omega t-\pi/2)}$

După cum se poate vedea din aceste ecuaţii, tensiunea de pe bobina este deplasata cu un unghi de faza de 90°, in avans fata de curent. Acest avans in faza semnifica faptul ca maximul (minimul) de tensiune apare la un moment de timp mai devreme decât cel pentru curent. Tensiunea aplicata pe condensator are de asemenea o deplasare de faza de 90°, dar in acest caz tensiunea rămâne in urma fata de curent. In ceea ce priveşte rezistenta, tensiunea si curentul sau, sunt arătate ca fiind in faza.

Astfel prezentate, reactanţele elementelor de circuit $X_L$ si $X_C$ pot fi tratate ca factori de corelare a valorilor de vârf (nu cele instantanee !) pentru curentul si tensiunea sinusoidala. Fiecare din aceste reactante se opun trecerii curentului sinusoidal in acord cu frecventa acestuia: bobina se opune egal cu **ωL**, iar condensatorul se opune cu **1/ωC.** La trecerea unui curent continuu ($\omega \to 0$), opoziţia unei reactante inductive este nula, iar cea a reactanţei capacitive devine infinit de mare. Rezistenta **R** singura care rămâne constanta indiferent de frecventa curentului sinusoidal.

Este indicat sa menţionam aici ca impedanţa unei reţele multi-ochi conţinând reactante si conectata la o sursa de curent alternativ nu poate fi calculata făcând uz de ecuaţiile aplicabile rezistentelor conectate "serie - paralel" si străbătute de un curent continuu. Aceste ecuaţii au fost obţinute din legile lui Kirchhoff prin directa însumare a căderilor de tensiune pe rezistente. In cazul curenţilor alternativi cvasi-staţionari aceasta poate fi făcuta pentru valorile instantanee ale curentului si tensiunii ţinând cont de diferenţa lor de faza. Astfel, cum am indicat si mai sus, reactanţele inductive si capacitive $X_L = \omega L$ si $X_C = 1/\omega C$ corelează doar valorile de vârf ale curenţilor si tensiunii sinusoidale, fara sa tina cont de diferenţa lor de faza. Astfel, reactanţele nu pot fi adunate algebric una alteia si apoi rezistentelor reţelei. Felul in care aceasta va fi făcuta este bine inteleasa referindu-ne la diagrame vectoriale. Deplasările de faza descrise sunt de mare importanta când determinam puterea in circuitele de curenţi alternativi.

Puterea intr-un circuit de curent alternativ poate fi exprimata in termeni ai puterii dezvoltate in fiecare moment de timp, sau in termeni ai puterii medii pe timp de o perioada (ex.: o perioada întreaga a curentului). Puterea instantanee este egala cu produsul valorilor instantanee ale curentului din circuit si a tensiunii aplicate la bornele circuitului:

$$p = iv = I_m V_m \sin\omega t \sin(\omega t+\varphi)$$

Pentru aceasta ecuaţie originea timpului a fost aleasa astfel ca faza iniţiala a curentului sau tensiunii sa fie zero. După cum se vede din aceasta ecuaţie când diferenţa de faza dintre curent si tensiune este alta decât zero, sunt momente de timp pentru care puterea instantanee $p < 0$ (devine negativa). La aceste momente direcţia curentului in circuit este de la potenţialul mic la cel înalt si circuitul alimentează cu energia înmagazinata de el, sursa de t.e.m., in loc sa consume energie de la ea. Astfel ca lucrul mecanic util realizat de un curent alternativ este evaluat găsind puterea medie **P** consumata de circuit intr-o perioada. In acest caz, toate momentele la care $p < 0$ trebuie de asemenea luate in considerare, întrucât componentele corespunzătoare vor fi scăzute din suma totala.

Pentru un curent sinusoidal avem:

$$P = \frac{1}{T}\int_{o}^{T} ivdt = \frac{1}{T}\int_{o}^{T} I_m V_m \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi)dt =$$

$$= \frac{I_m V_m}{2T}\int_{o}^{T}[\cos\varphi - \cos(2\omega + \varphi)]dt = \frac{I_m V_m}{2}\cos\varphi$$

$$\text{sau} \quad P = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\frac{V_m}{\sqrt{2}}\cos\varphi \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Cantitatile I si V se numesc **"valori efective"** ale curentului si tensiunii sinusoidale (rms ≡ eff. $V_{rms} \equiv V \equiv V_{eff}$ la fel pentru I). Produsul acestor valori ale curentului si tensiunii dau puterea disipata sub forma de căldura in circuit sau folosita pentru lucru mecanic de unele dispozitive de circuit. Când $\varphi = 0$, puterea $P = IV$ corespunde cu cea dezvoltata in circuit de un curent continuu.

Scalele multor instrumente electrice de măsura sunt gradate sa citească "valorile efective" (rms) pentru cantitatile măsurate. De acum vom folosi **valorile efective** (rms = root mean square) ale curentului sinusoidal (si altor mărimi), cu excepţia cazurilor unde vom considera valorile instantanee ale acestor mărimi.

Factorul "**cos φ**" joaca un rol important in ingineria electronica unde acesta determina eficienta utilizării echipamentului electric. Pentru a obţine aceeaşi putere la $\cos\varphi < 1$ ca la $\cos\varphi = 1$, valorile lui I si V trebuie sa fie corespunzător crescute. Dar instalaţiile electrice sunt proiectate sa lucreze la o valoare fixa specifica de tensiune care nu poate fi crescută, si la un curent limita, peste care creste nepermis disipaţia termica.

In consecinţa, puterea de ieşire a instalaţiilor electrice cade sub valoarea calculata când $\cos\varphi < 1$ chiar daca $I = I_m$ si $V = V_m$. Astfel este o practica comuna sa indici aşa numita "**putere aparenta**" (măsurata in volţi-amperi) **S = IV** a generatoarelor alternative si a altor dispozitive in loc de puterea utilizata care depinde de proprietatile unui dispozitiv (circuit) distinct (exemplu: de valorile lui cos φ).

Puterea cunoscuta ca **activa** sau **"true power"** este data de: **P=IVcosφ.**

Unghiul de faza a unui curent alternativ trecând printr-o rezistenta este $\varphi = 0$ si V=I/R. In acest caz puterea activa va fi data de: $\mathbf{P=I^2R}$

In circuite realizate doar din inductanţe si capacitati ideale $\cos\varphi = 0$ si puterea medie va fi nula. Aceasta se datorează faptului ca aceste elemente de circuit sunt capabile sa stocheze energia de la sursa in câmpurile lor electrice si magnetice si astfel sa o retransmită sursei de alimentare fara nici o pierdere. Acesta este motivul pentru care acestea sunt numite **"reactive".**

## 1.6. Teorema superpozitiei

Aceasta poate fi enunţata in doua forme: una in termenii unei reţele de impedanţe si alta in termenii unei reţele de admitanţe.

In orice reţea liniara de impedanţe si generatoare, curentul dintr-o ramura este egal cu suma curenţilor ce străbat acea ramura datorita fiecărui generator considerat separat cu toate celelalte generatoare înlocuite prin impedantele lor interne.

In exemplul din fig.1.6 vom aplica teorema superpozitiei pentru a calcula curentul I din ramura de 5Ω a circuitului.

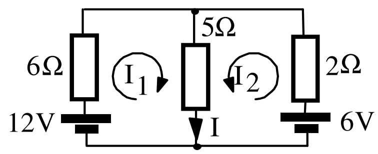


Fig.1.6. Aplicatie pentru folosirea teoremei superpozitiei

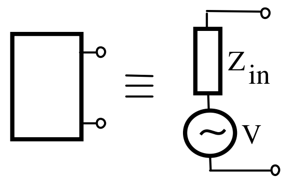


Fig.1.7. Circuit echivalent pentru teorema lui Thevenin

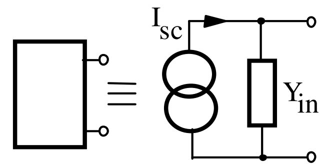


Fig.1.8. Circuit echivalent pentru teorema lui Norton

Consideram bateria de 12V singura si înlocuim bateria de 6V lăsând doar impedanţa sa interna de 2Ω. Pentru acest circuit avem:

$$I = I_1 = \{12/[6+(2*5)/(2+5)]\}*[2/(2+5)] = 24/52A$$

Acum considerând bateria de 6V singura, înlocuim bateria de 12V lăsând doar impedanţa sa interna de 6Ω. Acum:

$$I = I_2 = \{6/[2+(5*6)/(5+6)]\}*[6/(5+6)] = 36/52A$$

Cu ajutorul teoremei superpozitiei avem:

$$I = I_1 + I_2 = (24/52)+(36/52) = 1{,}1538A$$

A doua modalitate de exprimare a acestei teoreme este: in orice reţea de admitanţe si generatoare de curent potenţialul de-a lungul unei ramuri este egal cu suma potenţialelor de-a lungul acestei ramuri datorate fiecărui generator considerat ca acţionând separat cu toate celelalte generatoare înlocuite prin admitanţele lor interne.

### 1.7. Teorema lui Thevenin (teorema generatorului echivalent de tensiune)

Teorema lui Thevenin arata ca orice reţea de generatoare si impedanţe, cu doua terminale, poate fi înlocuita printr-un **"unic generator de tensiune in serie cu o singura impedanţa".** In fig.1.7. reţeaua este prezentata ca o "cutie" cu doua terminale, in partea stânga, iar circuitul echivalent alcătuit din generatorul unic de tensiune V si impedanţa $Z_{in}$ in partea dreapta (tot cu doua terminale).

Componentele circuitului echivalent sunt găsite după cum urmează:

V→ este tensiunea măsurata la bornele reţelei când nu este conectata nici o sarcina (tensiune de mers in gol);

$Z_{in}$→ este impedanţa măsurata intre terminale când toate generatoarele interne sunt suprimate si înlocuite cu impedantele lor interne.

### 1.8. Teorema lui Norton (teorema generatorului echivalent de curent)

Teorema lui Norton este similara cu teorema lui Thevenin cu excepţia ca circuitul echivalent este exprimat ca un generator de curent in paralel cu o admitanţa. In fig.1.8 reţeaua este prezentata ca o cutie cu doua terminale având in dreapta sa circuitul echivalent Norton.

Componentele circuitului echivalent sunt găsite după cum urmează:

$I_{sc}$→ este curentul care ar străbate un "scurtcircuit" plasat intre terminale;

$Y_{in}$→ este admitanţa măsurata intre terminale cu toate generatoarele suprimate ($Y_{in}$ - este bineînţeles inversul impedanţei $Z_{in}$ echivalente din cazul teoremei lui Thevenin).