ANALIZA SPECTRALA A SEMNALELOR ALEATOARE

1. SCOPUL LUCRARII

Se studiază caracterizarea în domeniul frecvenţă a semnalelor aleatoare de tip "zgomot alb" şi "zgomot roz", aplicaţiile acesteia la determinarea modulelor răspunsurilor în frecvenţă ale unor sisteme liniare şi invariante în timp.

2. INTRODUCERE

Modelarea matematică a zgomotelor care apar în dispozitivele şi circuitele electronice, dar şi a semnalelor vehiculate în sistemele de transmisie a informaţiei au necesitat introducerea noţiunii de semnal aleator, echivalentă cu noţiunea de proces aleator sau stochastic din teoria probabilităţilor.

Un semnal aleator este o colecţie de semnale uzuale, în timp continuu, numite traiectorii sau realizări. Traiectoriile se indexează după elementele α ale unei multimi K, care este un spaţiu probabilizat şi se notează $x^{(\alpha)}(t)$ (vezi fig. 1) şi sînt semnale de putere finită.

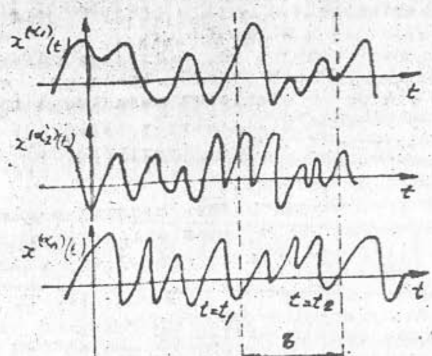

Fig.1. Traiectorii ale unui semnal aleator.

Cînd se fixează o valoare $t=t_1$ a timpului şi α variază în K, se obţine variabila aleatoare $x^{(\alpha)}(t_1)$, depinzînd de α.

Cînd se fixează o valoare $\alpha=\alpha_0$ şi t variază, se obţine traiectoria $x^{(\alpha_0)}(t)$ care este un semnal uzual, de putere finită.

Pentru $t=t_1$ fixat, se notează $p_1(x,t_1)$ densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $x^{(\alpha)}(t_1)$. Media acestei variabile alatoare este:

$$m_t = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_1(x,t_1)\, dx \tag{1}$$

Funcția care asociază fiecărui moment t media variabilei aleatoare $x^{(\alpha)}(t)$ se numește media procesului aleator și se notează $m(t)$. De exemplu:

$$m(t_1) = m_{t_1} \tag{2}$$

Se consideră în continuare două momente fixate, t_1 și t_2 (vezi fig. 1) și fie $p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ densitatea de repartiție comună a variabilelor aleatoare $x^{(\alpha)}(t_1)$ și $x^{(\alpha)}(t_2)$. Atunci media variabilei aleatoare produs, $x^{(\alpha)}(t_1)\cdot x^{(\alpha)}(t_2)$ este:

$$m_{t_1 t_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{3}$$

Funcția care asociază fiecărei perechi (t_1,t_2) valoarea $m_{t_1 t_2}$ se numește funcție de corelație statistică a semnalului aleator și se notează $R(t_1,t_2)$:

$$R(t_1,t_2) = m_{t_1 t_2} \tag{4}$$

Un semnal aleator se numește <u>staționar în sens larg</u> dacă îndeplinește următoarele două condiții:

-media semnalului este constantă în timp:

$$m(t) = m = \text{const} \tag{5}$$

-funcția de corelație statistică, $R(t_1,t_2)$, depinde doar de diferența argumentelor $\tau = t_2-t_1$ (vezi fig. 1):

$$R(t_1,t_2) = R(t_2-t_1) = R(\tau) \tag{6}$$

Se poate demonstra că, dacă semnalul aleator are valori reale, atunci funcția de corelație statistică este pară:

$$R(\tau) = R(-\tau),\quad \tau \in R \tag{7}$$

și are un maxim absolut în origine:

$$|R(\tau)| \le R(0),\quad \tau \in R \tag{8}$$

Se notează cu $\sigma(t)$ dispersia variabilei aleatoare $x^{(\alpha)}(t)$. Dacă semnalul aleator este staționar, se poate arăta că dispersia este constantă:

$$\sigma(t) = \sigma,\quad t \in R \tag{9}$$

și este legată de mărimile anterioare prin:

$$R(0) = \sigma^2 + m^2 \tag{10}$$

In plus

$$m^2 = \lim_{|\tau|\to\infty} R(\tau) \tag{11}$$

Analiza spectrală a semnalelor aleatoare nu se poate face asupra traiectoriilor individuale, pentru că acestea sînt semnale de putere finită, dar această analiză se poate face pe criterii statistice și energetice. Fie, în acest scop, $x^{(\alpha)}(t)$, cu α fixat, o traiectorie a semnalului aleator. Se consideră traiectoria trunchiată:

$$x_T^{(\alpha)}(t) = \begin{cases} x^{(\alpha)}(t), & |t|<T/2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \tag{12}$$

și $X_T^{(\alpha)}(\omega)$ transformata sa Fourier. Densitatea spectrală medie de putere a acestui semnal, $P_T^{(\alpha)}(\omega)$, se obține împărțind densitatea sa spectrală energetică $|X_T^{(\alpha)}(\omega)|^2$ la durata semnalului:

$$P_T^{(\alpha)}(\omega) = \frac{1}{T}\,|X_T^{(\alpha)}(\omega)|^2 \tag{13}$$

Se observă că $P_T^{(\alpha)}(\omega)$ este, pentru ω fixat, o variabilă aleatoare, definită pe cîmpul K. Notînd cu $m\{\cdot\}$ operatorul de mediere (vezi relația (1)) și făcînd $T\to\infty$ se obține o funcție de ω

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} m\{P_T^{(\alpha)}(\omega)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, m\{|X_T^{(\alpha)}(\omega)|^2\} \tag{14}$$

numită densitatea spectrală ,de putere a semnalului aleator.

Conform teoremei Wiener-Hincin, funcția de corelație statistică și densitatea spectrală de putere formează o pereche Fourier:

$$\mathcal{F}\{R(\tau)\} = F(\omega) \tag{15}$$

$F(\omega)$ este o funcție pară (vezi relația (7)) și pozitivă:

$$F(\omega) \ge 0 \quad \omega \in R$$

$$F(\omega) = F(-\omega) \quad \omega \in R \tag{15'}$$

Scopul prezentei lucrări este determinarea funcțiilor de densitate spectrală de putere pentru diverse semnale aleatoare de tip zgomot. Acest lucru nu este posibil prin măsurători statistice, deoarece aparatura electronică nu funcționează în acest mod. Zgomotele studiate fac parte dintr-o clasă de semnale aleatoare pentru care măsurătorile statistice se pot înlocui cu măsurători temporale, efectuate asupra unei singure traiectorii; aceste tipuri de semnale se numesc <u>ergodice</u>. In scopul introducerii acestei noțiuni, se consideră o traiectorie $x^{(\alpha)}(t)$ a semnalului aleator, cu $\alpha \in K$ fixat, și se definesc:

-media temporală a traiectoriei:

$$\langle m_\alpha \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^{(\alpha)}(t)\, dt \tag{16}$$

-funcția de corelație temporală a traiectoriei:

$$\langle R_\alpha(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^{(\alpha)}(t)\, x^{(\alpha)}(t+\tau)\,dt \qquad (17)$$

Se observă că $\langle R_\alpha(0)\rangle$ este chiar puterea traiectoriei.

Un semnal se numește <u>ergodic în sens larg</u> dacă $\langle m_\alpha\rangle$ și $\langle R_\alpha(\tau)\rangle$ nu depind de $\alpha \in K$:

$$\langle m_\alpha\rangle = \langle m\rangle \qquad (18)$$

$$\langle R_\alpha(\tau)\rangle = \langle R(\tau)\rangle, \qquad \alpha \in K$$

(Intr-o abordare mai detaliată, este suficient ca relațiile (18) să fie îndeplinite pentru o submulțime din K de probabilitate unitară).

Un semnal <u>staționar și ergodic în sens larg</u> are proprietatea că mărimile temporale sînt egale cu mărimile statistice corespunzătoare (vezi relațiile (5), (6) și (18)):

$$m = \langle m\rangle \qquad (19)$$

$$R(\tau) = \langle R(\tau)\rangle$$

Mărimea m capătă semnificația de componentă continuă a semnalului, iar R(0) cea de putere a semnalului. Avînd în vedere relația (10), rezultă că σ^2 este puterea de fluctuații a semnalului; puterea semnalului conținută în banda $[\omega_1;\omega_2]$ este:

$$P[\omega_1;\omega_2] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} F(\omega)\,d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega)\,d\omega\right] \qquad (20)$$

3. SEMNALE ALEATOARE IN SISTEME LINIARE

Se consideră un sistem cu răspunsul la impuls h(t) presupus real. Dacă la intrarea acestui sistem este prezent un semnal aleator staționar și ergodic în sens larg, atunci semnalul de la ieșire este staționar și ergodic în sens larg și:

$$F_y(\omega) = |H(\omega)|^2 F_x(\omega) \qquad (21)$$

unde $F_x(\omega)$, $F_y(\omega)$ sînt densitățile spectrale de putere ale semnalelor de la intrare, respectiv de la ieșire, iar $H(\omega)$ este răspunsul în frecvență al sistemului. Avînd în vedere că funcțiile care apar în relația (20) sînt pare (vezi (15')), puterea într-o bandă $[\omega_1;\omega_2]$ a semnalului de la ieșire se poate scrie (vezi și (20')):

$$P_y[\omega_1;\omega_2] = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} |H(\omega)|^2 F_x(\omega)\,d\omega = \qquad (22)$$

$$= 2\int_{f_1}^{f_2} |H(2\pi f)|^2 F_x(2\pi f)\,df$$

unde $\omega = 2\pi f$ și $0<f_1<f_2$. Vom nota:

$$F_{x+}(2\pi f) = 2F_x(2\pi f)\,\sigma(f) \qquad (23)$$

unde $\sigma(f)$ este semnalul treaptă unitate.

4. RIDICAREA EXPERIMENTALA A FUNCTIEI DE DENSITATE SPECTRALA DE PUTERE

Se conectează la intrarea analizorului de spectru în timp real (vezi anexa A5) semnalul staționar și ergodic x(t). Se estimează funcția $F_{x+}(2\pi f)$ în modul următor: se citește tensiunea efectivă de la ieșirea filtrului de analiză i în [dB] și se convertește în [V]; se calculează puterea prin ridicarea la pătrat a valorii tensiunii efective; se împarte această putere la banda B_i a filtrului; se asignează cantitatea găsită ca valoare a densității spectrale de putere asociate frecvenței centrale f_{ci} a filtrului; se efectuează operațiile anterioare pentru toate filtrele analizorului de spectru; se trasează prin punctele $(f_{ci};F_{x+}(2\pi f_{ci}))$ curba care estimează $F_{x+}(2\pi f)$ în domeniul de frecvențe care poate fi analizat cu analizorul de spectru respectiv.

5. DESFASURAREA LUCRARII

$F_x = f(f_{ci})$

5.1. Se determină experimental, după metoda prezentată la punctul 4, densitățile spectrale de putere ale diferitelor semnale de la ieșirea unui generator de zgomot: zgomot alb, zgomot roz etc. Datele se trec într-un tabel de forma:

densitate sp. de putere

i	f_{ci} [Hz]	B_i [Hz]	$V_{ef,i}$ [dB]	$V_{ef,i}$ [V]	P_i [V²]	$F_{i+}(2\pi f_{ci})$ [V²/hz]

Graficele se trasează pe hîrtie milimetrică.

5.2. Se determină densitățile spectrale de putere de la ieșirile unor sisteme liniare de ordinul I și ordinul al II-lea, cînd la intrările lor este prezent zgomotul roz. Rezultatele se trec în tabele ca cel de la punctul 5.1, iar graficele se trasează pe hîrtie milimetrică. Pe baza relației (21) și a rezultatelor de la 5.1 se estimează și se reprezintă grafic modulele răspunsurilor în frecvență ale filtrelor utilizate și se comparăcu valorile teoretice ale acestora.

6. INTREBARI

6.1. Cum se poate deduce funcția $F_x(\omega)$ din $F_{x+}(2\pi f)$?

6.2. Determinați funcția de corelație a zgomotului alb de la ieșirea generatorului de zgomot.

6.3. De ce credeți că la punctul 5.2 se utilizează zgomotul roz?

6.4. De ce se măsoară $F(\omega)$ în V^2/Hz?

6.5. Care este unitatea de măsură a valorilor funcției $R(\tau)$?

6.6. Cum se poate determina dispersia unui semnal aleator staționar și ergodic, cu medie nulă, utilizînd graficul densității spectrale de putere?

6.7. Care este efectul prezenței unei componente continue a semnalului aleator, staționar asupra funcției de densitate spectrală de energie?

6.8. Determinați funcția de corelație a semnalului aleator rezultat prin filtrarea unui zgomot alb cu un filtru trece-jos ideal, avînd amplificarea A și pulsația de tăiere ω_0. Determinați media și dispersia acestui semnal.

6.9. Imaginați un sistem de măsurare directă a dispersiei unui semnal aleator staționar și ergodic, avînd media nenulă.